SAYILAR VE SAYI BASAMAKLARI

1

Temel Kavramlar ve Sayı Kümeleri

- Sayıları ifade etmeye yarayan sembollere rakam denir.

  {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
- Rakamların belirli kurallara göre bir araya getirilmesiyle oluşturulan ifadelere sayı denir.
- Sayma Sayıları

  $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, ..., n, n + 1, ...\}$
- Doğal Sayılar

  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, n + 1, ...\}$
- Tam Sayılar

  $\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -1, 0, 1, ...n...\}$

  $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ pozitif tam sayılar

  $\mathbb{Z}^- = \{...-n, ..., -3, -2, -1\}$ negatif tam sayılar

  0; tam sayıdır, işareti yoktur.
- Rasyonel Sayılar

  $Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\ ,\ b \neq 0 \text{ ve EBOB}(a, b) = 1\right\}$
- İrrasyonel Sayılar

  Kök dışına çıkamayan sayılardır. Virgülden sonra düzensiz devam eden sayılar.

  $Q' = \left\{\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{5}, ...\right\}$
- Reel (Gerçel - Gerçek) Sayılar

  $R = Q \cup Q'$

2

Tek - Çift Sayılar

- 2 ile tam bölünebilen tam sayılara çift sayılar,
- 2 ile tam bölünemeyen tam sayılara tek sayılar denir.

±	T	Ç
T	Ç	T
Ç	T	Ç

×	T	Ç
T	T	Ç
Ç	Ç	Ç

- Ardışık iki tam sayının çarpımı çifttir.
- İki veya daha fazla tam sayının çarpımı tek sayı ise bütün çarpanlar tek sayı, çarpım çift sayı ise çarpanlardan en az birisi çift sayıdır.

3

Ardışık Sayılar ve Sonlu Toplamları

Ardışık tam sayılar: ..., n, n + 1, ...

Ardışık tek sayılar: ..., 2n – 1, 2n + 1, ...

Ardışık çift sayılar: ..., 2n, 2n + 2, ...

$$\text{Terim sayısı} = \frac{\text{Son terim} - \text{İlk terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1$$

$$\text{Ortanca sayı} = \frac{\text{Son terim} + \text{İlk terim}}{2}$$

Ardışık tam sayı toplamı = Terim sayısı · Ortanca sayı

- $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$
- $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

4

Asal Sayılar

- 1'den ve kendisinden başka pozitif tam sayı böleni olmayan 1'den büyük doğal sayılara asal sayı denir.

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...
- 2'den başka çift asal sayı yoktur.

Aralarında Asal Sayılar

- 1'den başka ortak böleni olmayan sayılara aralarında asal sayılar denir. (4, 9) aralarında asaldır.
- 1 ile bütün sayılar aralarında asaldır.

5

Faktöriyel Kavramı

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ ... \ n$
- $0! = 1, \quad 1! = 1$
- $n! = n(n - 1)!$

  $= n(n - 1)(n - 2)!$

6

Sayı Basamakları

- AB = 10A + B
- ABC = 100A + 10B + C
- AB + BA = 11(A + B)
- AB – BA = 9(A – B)

7

Pozitif - Negatif Sayılar

$a > 0 \Rightarrow$ a pozitif reel sayı, $a < 0 \Rightarrow$ a negatif reel sayı

- Aynı işaretli iki sayının toplamı bu iki sayının işareti ile aynı işaretlidir.
- Ters işaretli iki sayının toplamı, bu iki sayıdan mutlak değeri büyük olan ile aynı işaretlidir.
- Aynı işaretli iki sayının çarpımı pozitif, ters işaretli iki sayının çarpımı negatiftir.
- $a > b \Rightarrow a - b > 0 \quad \Rightarrow \quad b - a < 0$

BÖLME - BÖLÜNEBİLME, BÖLEN SAYILAR VE EBOB - EKOK

1

Bölme

- A, B, x, $\in \mathbb{N}$ ve $x \neq 0$

$$\begin{array}{rr|ll} \text{Bölünen} \leftarrow & A & x & \rightarrow \text{Bölen} \\ \cline{3-3} & - & B & \rightarrow \text{Bölüm} \\ \cline{2-2} & K \rightarrow \text{Kalan} & & \end{array}$$

- $A = Bx + K$
- $0 \leq K < x$
- K = 0 ise A sayısı x ile kalansız bölünüyor.

2

Bölen ile Kalan Arasındaki Bağıntı

M ve N tam sayılarının x tam sayısına bölümünden elde edilen kalanlar sırasıyla m ve n olsun.

1. M · N'nin x ile bölümünden kalan m · n
2. N^a nın x ile bölümünden kalan

   n^a, $a \in \mathbb{Z}^+$
3. M ± N'nin x ile bölümünden kalan (m ± n)'dir.

3

Bölünebilme Kuralları

1. **2 ile bölünebilme:** Birler basamağı çift olan sayılar 2 ile tam bölünür.
2. **3 ile bölünebilme:** Rakamları toplamı 3 ve 3'ün katı olan sayılar 3 ile tam bölünür.
3. **4 ile bölünebilme:** Son iki rakamının oluşturduğu sayı 00 veya 4'ün katı olan sayılar 4 ile tam bölünür.
4. **5 ile bölünebilme:** Birler basamağı 0 ve 5 olan sayılar 5 ile tam bölünür.
5. **6 ile bölünebilme:** 3 ile tam bölünebilen çift sayılar 6 ile tam bölünür.
6. **8 ile bölünebilme:** Son üç rakamının oluşturduğu sayı 000 ya da 8'in katı olan sayılar 8 ile tam bölünür.
7. **9 ile bölünebilme:** Rakamları toplamı 9 ve 9'un katı olan sayılar 9 ile tam bölünür.
8. **10 ile bölünebilme:** Birler basamağı 0 olan sayılar 10 ile tam bölünür.
9. **11 ile bölünebilme:** xyzkt sayısında birler basamağından başlayarak sırasıyla +1 ve –1 ile çarpılır.

   $\underset{+}{x}\,\underset{-}{y}\,\underset{+}{z}\,\underset{-}{k}\,\underset{+}{t} \Rightarrow (x + z + k) - (y + k)$

   sonucu 11'in tam sayı katları ise xyzkt sayısı 11 ile tam bölünür.
10. **12 ile bölünebilme:** 3 ve 4 ile, **15 ile bölünebilme:** 3 ve 5 ile

    18 ile bölünebilme: 2 ve 9 ile **24 ile bölünebilme:** 3 ve 8 ile

    Aralarında asal iki sayıdan her birine tam bölünebilen bir sayı bu iki sayının çarpımına da tam bölünür.

4

Asal Çarpanlarına Ayırma

x, y, z birbirinden farklı asal sayılar ve a, b, c pozitif tam sayılar olmak üzere, A doğal sayısı; $A = x^a \cdot y^b \cdot z^c$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılır. A doğal sayısının

1. Pozitif tam sayı bölen sayısı;

   $p = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$
2. Tam sayı bölen sayısı;

   $2p = 2(a + 1)(b + 1)(c + 1)$
3. Tam sayı olan bütün bölenlerinin toplamı 0'dır.
4. Asal bölenlerinin toplamı, $t_a = x + y + z$
5. Asal olmayan tam sayı bölenlerinin toplamı,

   $\overline{t_a} = -(x + y + z)$

5

EBOB

- İki veya daha fazla doğal sayıdan her birini bölebilen en büyük sayıya bu sayıların en büyük ortak böleni (EBOB) denir.

  EBOB(x, y) = b ⇒ x = bm ve y = bn

  (m ve n aralarında asal)

EKOK

- İki veya daha fazla sayıdan her birine bölünebilen en küçük doğal sayıya bu sayıların en küçük ortak katı (EKOK) denir.

  EKOK(x, y) = k ⇒ k = px ve k = qy

  (p ve q aralarında asal)

Özellikler

1. EKOK(a, b) · EBOB (a, b) = a · b
2. a ile b aralarında asal ise

   EBOB(a, b) = 1 EKOK(a, b) = a · b

6

EBOB - EKOK Problemlerinde küçük parçadan büyük parçaya geçiliyor ise EKOK, büyük parçadan küçük parçaya geçiliyor ise EBOB hesaplanıyor.

- $\text{Bahçe etrafına dikilen ağaç sayısı} = \frac{\text{Çevre}}{\text{EBOB (kısa kenar, uzun kenar)}}$
- $\text{Bir alana dizilen fayans sayısı} = \frac{\text{Büyük alan}}{\text{Fayans alanı}}$
- $\text{Bir odaya konulan kutu sayısı} = \frac{\text{Oda hacmi}}{\text{Kutu hacmi}}$

RASYONEL SAYILAR VE SIRALAMA

1

Kesir

- $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere,

$\frac{a}{b}$ ifadesine kesir denir.

$\frac{a}{b}$ $a \rightarrow$ pay, $b \rightarrow$ payda

- $|a| < |b| \Rightarrow$ basit kesir
- $|a| \geq |b| \Rightarrow$ bileşik kesir
- $a \neq 0$ olmak üzere, $\frac{0}{a} = 0$ ve $\frac{a}{0} =$ tanımsız

2

Bileşik Kesrin Tam Sayılı Kesre Çevrilmesi

- $a \geq b > 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ kesri

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} - & c \\ \hline d & \end{array}$$ ise $c\frac{d}{b}$ kesrine eşittir.

Tam Sayılı Kesrin Bileşik Kesre Çevrilmesi

$$c\frac{d}{b} = c + \frac{d}{b} = \frac{c \cdot b + d}{b}$$

3

Denk Kesirler: $k \neq a$; $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a : k}{b : k}$

4

Rasyonel Sayılar

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

- **İki Rasyonel Sayının Eşitliği**

$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \Rightarrow a = c$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$

- **Çarpma**

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

- **Toplama - Çıkarma**

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$
(d) (b)

- **Bölme**

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

5

Ondalık Sayılar

- Paydası 10'un pozitif tam sayı kuvvetleri şeklinde yazılabilen rasyonel sayılara ondalık sayılar denir.

$\frac{1}{10} = 0,1;\ \frac{1}{100} = 0,01;\ -\frac{3}{1000} = -0,003$

$\frac{125}{100} = 1,25 = 12,5 \cdot 10^{-1} = 125 \cdot 10^{-2}$

6

Rasyonel Sayılarda Sıralama

- Paydaları eşit olan pozitif kesirlerden payı büyük olan kesir daha büyüktür.
- Payları eşit olan pozitif kesirlerden paydası küçük olan kesir daha büyüktür.
- Pay ve paydası arasındaki fark eşit olan pozitif kesirlerin pay ve paydasındaki sayılar büyüdükçe; basit kesirlerin değeri artar, bileşik kesirlerin değeri azalır.
- Negatif sayılar sıralanırken önce pozitif sayılar gibi sıralama yapılır, sonra sıralama ters çevrilir.

7

Devirli Ondalık Sayılar

$\frac{10}{3} = 3,3333... = 3,\overline{3}$

$\frac{23}{22} = 1,0454545... = 1,0\overline{45}$

$$a,b\overline{cd} = \frac{abcd - ab}{\begin{array}{cc} \text{Virgülden sonra} & \text{Devretmeyen} \\ \text{devreden kadar} & \text{kadar} \\ 9 & 0 \end{array}}$$

$0,\overline{2} = \frac{2}{9}$

BASİT EŞİTSİZLİK

1

Eşitsizlik

$x < y,\ x > y,\ x \leq y,\ x \geq y$

şeklinde ifade edilir.

2

Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenebilir veya çıkarılabilir.

$x < y \Rightarrow x \pm a < y \pm a$

$x > y \Rightarrow x \pm a > y \pm a$

3

Eşitsizliğin iki tarafı aynı pozitif sayıyla çarpılıp bölünebilir, eşitsizlik yön değiştirmez.

$(a > 0)$ $x < y \Rightarrow x \cdot a < y \cdot a$
$x < y \Rightarrow x : a < y : a$

Eşitsizliğin iki tarafı aynı negatif sayıyla çarpılırsa veya bölünürse eşitsizliğin yönü değişir.

$(a < 0)$ $x < y \Rightarrow x \cdot a > y \cdot a$
$x < y \Rightarrow x : a > y : a$

4

$x \cdot y < 0$ ise x ile y ters işaretlidir.

$x \cdot y > 0$ ise x ile y aynı işaretlidir.

5

Aynı yönlü eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir.

$$\begin{array}{rl} & x < y \\ + & a < b \\ \hline & x + a < y + b \end{array}$$

Aynı yönlü eşitsizlikler çıkarılamaz.

6

$a, b, c, d, \in \mathbb{R}$

$a < x < b$ ve $c < y < d$

olmak üzere $x \cdot y$ çarpımı için;

$$\begin{array}{rl} & a < x < b \\ \times & c < y < d \\ \hline & ac,\ ad,\ bc,\ bd \end{array}$$

çarpımlarından en küçüğü alt sınır, en büyüğü üst sınırdır.

7

n pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$x < y \Leftrightarrow x^{2n-1} < y^{2n-1}$

$0 < x < y \Leftrightarrow 0 < x^n < y^n$

$x < y < 0 \Leftrightarrow x^{2n} > y^{2n} > 0$

8

x reel sayı için

$x \geq -1 \quad \Rightarrow x^5 < x^3 < x < x^2 < x^4$

$-1 < x < 0 \Rightarrow x < x^3 < x^2$

$0 < x < 1 \quad \Rightarrow ...x^3 < x^2 < x$

$1 < x \quad \Rightarrow x < x^2 < x^3...$

9

x ve y aynı işaretli olmak üzere,

$x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

10

x ve y zıt işaretli olmak üzere,

$x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

11

- Kapalı Aralık
  $a \leq x \leq b \Leftrightarrow x \in [a, b]$
- Açık Aralık
  $a < x < b \Leftrightarrow x \in (a, b)$
- Yarı Açık Aralık
  $a \leq x < b \Leftrightarrow x \in [a, b)$
  $x < a \Leftrightarrow (-\infty, a)$
  $b \leq x \Leftrightarrow [b, \infty)$

12

Eşitsizliğin karesinin alınması;

- $2 < x \leq 5$

$x^2 = ?$

$$\begin{array}{rc} & 2 < x \leq 5 \\ \times & 2 < x \leq 5 \\ \hline & 4,\ 10,\ 10,\ 25 \end{array}$$

$4 < x^2 \leq 25$

- $-2 < x \leq 5$

$x^2 = ?$

$$\begin{array}{rc} & -2 < x \leq 5 \\ \times & -2 < x \leq 5 \\ \hline & 4,\ -10,\ -10,\ 25 \end{array}$$

Herhangi bir sayının karesi negatif olmaz.

$0 \leq x^2 \leq 25$

- $-5 \leq x < -2$

$x^2 = ?$

$$\begin{array}{rc} & -5 \leq x < -2 \\ \times & -5 \leq x < -2 \\ \hline & 25,\ 10,\ 10,\ 4 \end{array}$$

$4 < x^2 \leq 25$

DENKLEM ÇÖZME

1

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax + b = 0$

şeklindeki eşitliklere birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ denklemin köküdür.

$Ç.K = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

2

Bir denklemin çözüm kümesinin elemanları denklemde yerine yazıldığında denklemi sağlar.

3

ax + b = 0 Eşitliğinin Çözüm Kümesinin Bulunması

I. $a \neq 0$ ise $x = -\frac{b}{a}$ ve $Ç.K = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

II. $a = 0$ ve $b \neq 0$ ise $Ç.K = \varnothing$

III. $a = 0$ ve $b = 0$ ise $Ç.K = \mathbb{R}$

4

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

- $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$, $b \neq 0$ olmak üzere,
  $ax + by + c = 0$
  eşitliğine birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem denir.
  $a = b = c = 0$ ise $Ç.K = \mathbb{R}$

5

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri

$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ denklem sistemi için;

1. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ise, denklem sisteminin çözüm kümesi bir elemanlıdır ve bu eleman, sistemi oluşturan denklemlerin belirttiği d_1 ve d_2 doğrusunun kesim noktası olan (x, y) ikilisidir.

2. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ise $Ç.K = \mathbb{R}$ ve bu elemanlar d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki bütün noktalardır.

3. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ise $Ç.K = \varnothing$

Yani $d_1 \parallel d_2$ dir. (d_1 ile d_2 paralel doğrulardır.)

6

Çözüm Kümesinin Bulunması

1. Yok Etme Metodu

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ 3x + 2y = 14 \end{array}\right\} \text{1. denklem –2 ile çarpılır.}$$

$$\begin{array}{rl} & -4x - 2y = -16 \\ + & 3x + 2y = 14 \\ \hline & \left.\begin{array}{r} -x = -2 \Rightarrow x = 2 \\ y = 4 \end{array}\right\} Ç.K = \{(2, 4)\} \end{array}$$

2. Yerine Koyma Metodu

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 9 \\ 3x - y = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{2. denklemdeki y değeri çekilip} \\ \text{1. denklemde yazılır.} \end{array}$$

$y = 3x - 10$

$2x - 3(3x - 10) = 9 \Rightarrow 2x - 9x + 30 = 9$

$\Rightarrow -7x = -21$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -1 \end{array}\right\} Ç.K = \{(3, -1)\}$$

7

Özel Denklemler

Çok bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümü, her seferinde bir bilinmeyeni yok ederek yapılır.

$$\begin{array}{rl} & x + y = 10 \\ & x - z = 20 \\ + & z - y = 30 \\ \hline & 2x = 60 \\ & x = 30 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{denklem sistemini} \\ \text{çözelim.} \end{array}$$

1. denklemde x = 30 için y = –20

2. denklemde x = 30 için z = 10

$Ç.K = \{(30, -20, 10)\}$

MUTLAK DEĞER

1

- a sayısının sayı doğrusu üzerinde 0'a olan uzaklığına a'nın mutlak değeri denir. $|a|$ şeklinde gösterilir.

$$|a| = \begin{cases} a \ ; \ a > 0 \text{ içi pozitif ise aynen çıkar.} \\ 0 \ ; \ a = 0 \\ -a \ ; \ a < 0 \text{ içi negatif ise önüne – alıp çıkar.} \end{cases}$$

2

- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|x| > x \Leftrightarrow x < 0$
- $|-x| = |x|$ ve $|x| \geq 0$
- $|x - y| = |y - x|$
- $|x \cdot y| = |y \cdot x| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$
- $n \in \mathbb{Z}$
  $|x^n| = |x|^n$,
  $|x^{2n}| = |x|^{2n} = x^{2n}$
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

3

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4

- $a \in \mathbb{R}^+$; $|x| = a \Rightarrow f(x) = a$ veya $f(x) = -a$
  $a \in \mathbb{R}^-$; $|x| = a \Rightarrow Ç.K = \varnothing$

5

- $|x| = y$ ise
  $x = y$ ve $x = -y$
  denklemleri çözülür. Bulunan x değerleri başlangıçtaki denkleme yazılır, denklemi sağlamayan elemanlar çözüm kümesine dahil edilmez.

6

- $|f(x)| = |g(x)|$ eşitliği iki farklı yoldan çözülebilir.
  i) $f(x) = g(x)$ ve $f(x) = -g(x)$
  ii) $(|f(x)|)^2 = (|g(x)|)^2$
  $f^2(x) = g^2(x)$ eşitliği çözümlenir.

7

- $a \in \mathbb{R}^+$
  $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

8

- $a \in \mathbb{R}^-$
  $|x| \leq a \Rightarrow Ç.K = \varnothing$

9

- $a \in \mathbb{R}^+$
  $|x| > a \Rightarrow x > a$ veya $x < -a$

10

- $|x| < |y| \Rightarrow x^2 < y^2$

Örnek: $|3^x - y| + |x^5 + 1| = 0$, $x^y \cdot y^x$ kaçtır?

İki mutlak değerin toplamı 0 ise mutlak değerler 0'dır.

$3^x - y = 0 \qquad x^5 + 1 = 0$

$3^x = y \qquad x^5 = -1$

$3^x = y \qquad x = -1 \Rightarrow 3^{-1} = y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}$

$(-1)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1 \cdot 3 = -3$

11

- $a \in \mathbb{R}^-$
  $|x| \geq a \Rightarrow Ç.K = \mathbb{R}$

12

- $a, b \in \mathbb{R}^+$
  $a < |x| < b \Rightarrow a < x < b$ veya $-b < x < -a$

SADIK UYGUN YAYINLARI

ÜSLÜ SAYILAR

1

$\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{\text{n tane}} = \underset{\text{taban}}{x}^{\overset{\text{üs}}{n}}$

2

$x^0 = 1 \ (x \neq 0)$

0^0 tanımsız

3

$a \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$

$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$

$(-a)^{2n} = a^{2n}$

4

$1^n = 1$

$(-1)^{2n} = 1$

$(-1)^{2n-1} = -1$

5

$(X^n)^m = (X^m)^n = X^{m.n}$

6

$n \in \mathbb{Z}^+$, $x \neq 0$;

$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$

7

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

$x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$

8

$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

$\frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$

9

$ax^n + bx^n - cx^n = x^n(a + b - c)$

10

$x \neq 0$ ve $x \neq \pm 1$ iken

$x^m = x^n \Rightarrow m = n$

11

$x \neq \pm 1$, $y \neq \pm 1$ ve $n \neq 0$

$x^n = y^n \Rightarrow \begin{cases} x = y & ; \text{ n reel sayı} \\ x = \mp y & ; \text{ n çift sayı} \end{cases}$

12

$x^n = 1 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 & \text{ve} \quad x \neq 0 \\ x = 1 & \text{ve} \quad \text{n reel sayı} \\ x = -1 & \text{ve} \quad \text{n çift sayı} \end{cases}$

13

a ve b aralarında asal sayılar

$\left.\begin{matrix} a^{x_1} = b^{y_1} \\ a^{x_2} = b^{y_2} \end{matrix}\right\} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

KÖKLÜ İFADELER

1

- $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$

  $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$

2

- $\sqrt[n]{a}$ ifadesinin tanımlı olabilmesi için;

  n tek ise $a \in \mathbb{R}$

  n çift ise $a \geq 0$ olmalı.

3

- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

  (Üslü yazılışı)

4

- $\sqrt[2n-1]{x^{2n-1}} = x \rightarrow$ Tek kuvvette aynen çıkar.
- $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x| \rightarrow$ Çift kuvvette mutlak değer içinde çıkar.

5

- $x\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n \cdot y}$

Kök dışındaki sayı, kökün içine girerken kökün derecesi kuvvet olarak geçer.

6

Sadeleştirme - Genişletme

- $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot r]{x^{m \cdot r}} = \sqrt[\frac{n}{r}]{x^{\frac{m}{r}}}$

7

Toplama - Çıkarma

- $a\sqrt[n]{x^m} + b\sqrt[n]{x^m} - c\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^m}(a + b - c)$

8

Çarpma - Bölme

- $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

  $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad y \neq 0$

9

Paydanın Rasyonel Yapılması

- $\frac{a}{\underset{(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}} = \frac{a\sqrt{x}}{x}$
- $\frac{a}{\underset{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}} = \frac{a(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y}$
- $\frac{a}{\underset{(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}} = \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y}$

10

Sıralama

- Tanımlı olduğu durumlarda

  $a < b < c \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{c}$
- Köklerin dereceleri eşit değilse genişletilerek ortak katta eşitlenir.

  Örnek: $a = \sqrt{5}, b = \sqrt[3]{2}, c = \sqrt[4]{3}$

  EKOK$(2, 3, 4) = 12$

  $\sqrt[12]{5^6}, \sqrt[12]{2^4}, \sqrt[12]{3^3}$

  $a > c > b$

11

- $\sqrt{\underset{\underset{a+b}{\downarrow}}{x} \mp 2\sqrt{\underset{\underset{a \cdot b}{\downarrow}}{y}}} = \sqrt{a} \mp \sqrt{b} \ (a > b)$

Örnek: $\sqrt{\underset{\underset{3+5}{\downarrow}}{8} + 2\sqrt{\underset{\underset{3 \cdot 5}{\downarrow}}{15}}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

12

- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[r]{x}}} = \sqrt[m \cdot n \cdot r]{x}$

ÇARPANLARA AYIRMA

1

Ortak Çarpan Parantezine Alma

$P(x).Q(x) + P(x).B(x) = P(x)(Q(x) + B(x))$

Örnek:

$4mn^2 - 6m^2n^3 - 10m^3n^4 = 2mn^2(2 - 3mn - 5m^2n^2)$

2

$y - x = -(x - y)$

$(x - y)^{2n} = (y - x)^{2n} \quad (n \in \mathbb{N})$

$(y - x)^{2n+1} = -(x - y)^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$

3

Gruplandırarak Çarpanlara Ayırma

$ax + ay - bx - by = a(x + y) - b(x + y)$

$= (x + y)(a - b)$

Örnek: $4^x - 6^x - 2^x + 3^x = 2^x(2^x - 3^x) - (2^x - 3^x)$

$= (2^x - 3^x)(2^x - 1)$

4

Özdeşlikler

Tam Kare:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

İki Kare Farkı:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

İki Kare Toplamı:

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

$= (a - b)^2 + 2ab$

İki Küp Toplamı Farkı:

$a^3 + b^3 = (a + b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$

$= (a + b)^3 - 3ab\cdot(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$

$= (a - b)^3 + 3ab\cdot(a - b)$

Tam Küp:

$(a \pm b)^3 = (a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3)$

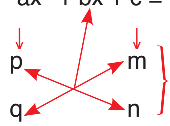
5

- $x^2 + \underset{\underset{m+n}{\downarrow}}{b}x + \underset{\underset{m\cdot n}{\downarrow}}{c} = (x + m)(x + n)$

Örnek:

$x^2 \underset{\underset{(-8+3)}{\downarrow}}{-5}x \underset{\underset{(-8\cdot 3)}{\downarrow}}{-24} = (x - 8)(x + 3)$

- $ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n)$



np + mq = b ise

6

Terim Ekleyip - Çıkarma

Örnek:

$x^4 + x^2 + 1$

$x^4 + x^2 + 1 + x^2 - x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$

$= (x^2 + 1)^2 - x^2$

$= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$

Örnek:

$4a^2 - 12a - 4b + b^2$ ifadesinin en küçük değeri nedir?

$\underset{\underset{(2a)^2}{\downarrow}}{4a^2} \underset{\underset{-2\cdot 2a\cdot 3}{\downarrow}}{-12a} \underset{\underset{-2\cdot 2b}{\downarrow}}{-4b} + \underset{\underset{b^2}{\downarrow}}{b^2}$

$\Rightarrow 4a^2 - 12a - 4b + b^2 + 13 - 13$

$= \underbrace{(2a - 3)^2}_{0} + \underbrace{(b - 2)^2}_{0} - 13$

$= -13$

7

$(x + y)^n$ ifadesinin açılımı

n = 0 1

n = 1 .... 1 1

n = 2 .... 1 2 1

n = 3 .... 1 3 3 1

n = 4 .... 1 4 6 4 1

n = 5 .. 1 5 10 10 5 1

....

n = 0 için $(x \pm y)^0 = 1$

n = 1 için $(x \pm y)^1 = (x \pm y)$

n = 2 için $(x \pm y)^2 = (x^2 \pm 2xy + y^2)$

n = 3 için $(x \pm y)^3 = (x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3)$

n = 4 için $(x \pm y)^4 = x^4 \pm 4\cdot x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$

ORAN ORANTI

1

Oran; en az biri sıfırdan farklı, aynı birimden iki çokluğun karşılaştırılmasına (bölümüne) denir.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ birer orandır.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ikili orantıdır.

k; orantı sabiti

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a : b = c : d$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Longleftrightarrow a : c : e = b : d : f$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a\cdot d = b\cdot c$ (içler - dışlar çarpımı)

2

- a, b, c sayılarıyla dördüncü orantılı sayı x ise $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ olur.
- a ve b sayılarının orta orantılısı x ise $\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \sqrt{a\cdot b}$ dir.

3

Orantının Özellikleri

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ orantısında

1. $a = b\cdot k, \quad c = d\cdot k, \quad e = f\cdot k$
2. $n \in \mathbb{R}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = \frac{e^n}{f^n} = k^n$
3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow \frac{a \pm c \pm e}{b \pm d \pm f} = k$
4. $x, y, z \in \mathbb{R} - \{0\}$

   $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow \frac{a\cdot x + c\cdot y + e\cdot z}{b\cdot x + d\cdot y + f\cdot z} = k$
5. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow \frac{a\cdot c\cdot e}{b\cdot d\cdot f} = k^3$

4

Orantı Çeşitleri

1. **Doğru Orantı**; oranı sabit olan iki çokluk doğru orantılıdır.

   y ile x doğru orantılı ise $\frac{y}{x} = k$ veya $y = k\cdot x$ olur.

   - x, y, z sayıları sırasıyla a, b, c sayılarıyla orantılı ise; $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ olur.
2. **Ters Orantı**; çarpımı sabit olan iki çokluk ters orantılıdır.

   y ile x ters orantılı ise $y\cdot x = k$ veya $y = \frac{k}{x}$

   - x, y, z sayıları sırasıyla a, b, c sayılarıyla ters orantılı ise; $a\cdot x = b\cdot y = c\cdot z = k$
3. **Bileşik Orantı**; y sayısı, x ile doğru, z ile ters orantılı ise; $\frac{y\cdot z}{x} = k$

5

Ortalamalar

1. Aritmetik Ortalama

   $A.O = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$
2. Geometrik Ortalama

   $G.O = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2 \ldots x_n}$
3. Harmonik Ortalama

   $H.O = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$

6

- **İş problemlerinde**; kapasite, zaman, işçi sayısı vb. gibi bütün değişkenler yapılan işle doğru orantılıdır.

$$\frac{\text{Yapılan iş}}{\text{O iş ile ilgili diğer verilerin çarpımı}}$$

Örnek: 8 işçi, günde beşer saat çalışarak 3 günde 25 m^2 halı dokuyabildiğine göre, 9 işçi günde dörder saat çalışarak 30 m^2 halıyı kaç günde dokur?

$$\frac{\overset{\text{(Yapılan iş)}}{25}}{\underset{\text{(İşle ilgili veriler)}}{8\cdot 5\cdot 3}} = \frac{\overset{\text{(Yapılan iş)}}{30}}{\underset{\text{(İşle ilgili veriler)}}{9\cdot 4\cdot t}}$$

$t = 4$ gün

PROBLEMLER

Sayı Problemleri

x herhangi bir sayı olsun.

- Bir sayının;
  - 4 fazlası = x + 4
  - 4 eksiği = x – 4
  - 4 katı = 4x
  - 4'te biri = $\frac{x}{4}$
- Bir sayının;
  - 2 katının 3 fazlası = 2x + 3
  - 3 fazlasının 2 katı = 2(x + 3)
- Bir sayının
  - karesinin 2 eksiği = $x^2 - 2$
  - 2 eksiğinin karesi = $(x - 2)^2$

x ve y herhangi iki sayı olsun.

- İki sayının;
  - Toplamı = x + y
  - Farkı = x – y
  - Çarpımı = x . y
  - Oranı = $\frac{x}{y}$
  - Kareleri farkı = $x^2 - y^2$
  - Farklarının karesi = $(x - y)^2$
- Problemlerde bilinmeyen sayısını artırmamak için bilinmeyenler birbiri cinsinden yazılır.

Karışım Problemleri

- A maddesinden a miktarda,

  B maddesinden b miktarda katılarak elde edilen (a + b) miktardaki bir karışımda

  A maddesinin ağırlık yüzdesi = $\frac{100 \cdot a}{a+b}$

  B maddesinin ağırlık yüzdesi = $\frac{100 \cdot b}{a+b}$'dir.
- Tuzlu su karışımında tuz oranı %x ise

  su oranı %(100 – x)'dir.

Yüzde - Faiz Problemleri

- x sayısının %a'sı = $x \cdot \frac{a}{100}$

  artırma(zam): %a fazlası $x \cdot \frac{100+a}{100}$

  azaltma(indirim): %a eksiği $x \cdot \frac{100-a}{100}$

Hız Problemleri

- X = V . t

  Yol = Hız . zaman

km	km/sa.	sa.
m	m/dk.	dk.
km	km/sn.	sn.

Birbirlerine doğru hareket eden iki aracın karşılaşma süreleri $\boxed{t_k = \frac{|AB|}{V_A + V_B}}$

Aynı yönde hareket ettiklerinde arkadaki aracın öndekine yetişme süresi $\boxed{t_y = \frac{|AB|}{V_A - V_B}}$

- Ortalama Hız $\boxed{V_{ort} = \frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}}}$

Yaş Problemleri

- Kişilerin yaşları daima doğal sayıdır.
- Aksi söylenmedikçe kardeşlerin yaşları birbirine eşit olabilir.
- Doğum tarihi küçük olan daha büyüktür.
- İki kişi arasındaki yaş farkı sabittir.
- İki kişinin doğum tarihleri arasındaki fark, yaşları farkına eşittir.
- Şimdiki yaşı x ise t yıl önce = x – t, t yıl sonra = x + t yaşında
- Bugünkü yaşları toplamı x olan n kişinin;

  t yıl önceki yaşları toplamı (x – nt)'dir.
- Bugünkü yaşlarının ortalaması x olan n kişinin;

  t yıl önceki yaş ortalaması x – t

  t yıl sonraki yaş ortalaması x + t

Örnek: Sena'nın bugünkü yaşı 4x + 2, Ezgi'nin ise 3x + 4'tür. Sena 25 yaşına geldiğinde, Ezgi, 4x + 7 yaşında olacağına göre, Sena'nın bugünkü yaşı kaçtır?

Yaş farkı sabit olduğundan (4x + 2) – (3x + 4) = 25 – (4x + 7)

$$x - 2 = 18 - 4x$$
$$5x = 20$$
$$x = 4$$
$$4x + 2 = 4 \cdot 4 + 2 = 18$$

Kesir Problemleri

- Bir bütünün $\frac{1}{x}$'i kesilirse geriye $1 - \frac{1}{x}$'i kalır.
- Bir bütün birden fazla kesirli parçaya bölünürse, bütünün tamamı paydaların EKOK'u seçilir.

  Örneğin parasının önce $\frac{1}{3}$'ü, sonra $\frac{1}{2}$'si ve daha sonra $\frac{1}{5}$'ini harcayan kişinin parasının tamamına

  EKOK(2, 3, 5) = 30 olduğundan 30x denir.
- Homojen bir telin bir ucundan 2x birim kesilirse orta noktası x birim kayar.

İşçi Problemleri

- 1. işçi bir işi a günde, 2. işçi aynı işi b günde bitirsin.
- 1. işçi 1 günde işin $\frac{1}{a}$'sını bitirir.

  t günde işin $\frac{t}{a}$'sını bitirir.
- İki işçi birlikte işin tamamını $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)t = 1$ eşitliğinden t günde bitirir. İşin yarısını $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)k = \frac{1}{2}$ eşitliğinden k günde bitirir.
- 1. işçi t gün çalıştıktan sonra 2. işçi yardıma gelirse $\frac{1}{a} \cdot t + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)k = 1$ denklemiyle iş tamamlanır.

  İşin toplam süresi t + k gün olur.
- 2 işçi birlikte t gün çalıştıktan sonra 2. işçi işi bırakırsa $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)t + \frac{1}{a}k = 1$ denklemiyle iş tamamlanır.

  İşin toplam süresi t + k gün olur.

KÜMELER

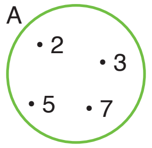
1

- İyi tanımlanmış nesneler topluluğuna küme denir.
- Kümeyi oluşturan varlıkların her birine kümenin elemanı denir.
- $x \in A$; x, A kümesinin elemanıdır.
- $x \notin A$; x, A kümesinin elemanı değildir.
- Bir kümede, bir eleman bir kez yazılır.
  Elemanlar yer değiştirse bile küme değişmez.
- s(A); A kümesinin elaman sayısıdır.

Liste Yöntemi: $A = \{2, 3, 5, 7\}$

Ortak Özellikler Yöntemi: $A = \{ x \mid x < 10 \text{ ve } x \text{ asal sayı}\}$

Venn Şeması Yöntemi:



Eşit Kümeler: Aynı elemanlardan oluşan ve eleman sayıları eşit olan kümelerdir.

$$A = B$$

Denk Kümeler: Sadece eleman sayıları eşit olan kümelerdir.

$$s(A) = s(B) \Leftrightarrow A \equiv B$$

Boş Küme: Hiç elemanı olmayan kümedir. Gösterimi;

$$\varnothing \text{ veya } \{\ \ \}$$

Evrensel Küme: Üzerinde işlem yapılan en geniş kümedir.

$$E$$

Alt Küme: A kümesinin bütün elemanları, B kümesinin de elemanı ise A kümesine B kümesinin alt kümesi denir. $A \subset B$ şeklinde gösterilir. $A \not\subset B$ (A alt küme değildir B)

Öz Alt Küme: Bir kümenin kendisinden farklı olan alt kümelerine bu kümenin öz alt kümeleri denir.

2

Alt Kümeye Ait Özellikler

1) $\varnothing \subset A$ (Boş küme her kümenin alt kümesi)
2) $A \subset A$ (Her küme kendisinin alt kümesidir)
3) $A \subset E$ (Her küme evrensel kümenin alt kümesidir)
4) $A \subset B$ ve $B \subset A \Leftrightarrow A = B$
5) $A \subset B$ ve $B \subset C \Rightarrow A \subset C$
6) n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt küme sayısı, n'nin r'li kombinasyonlarının sayısı kadardır.

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (n \geq r)$$

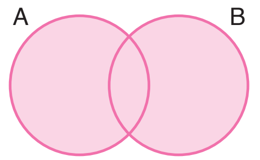
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{k} \Rightarrow r = k$ veya $r + k = n$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

7) n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı 2^n, öz alt küme sayısı $2^n - 1$ dir.

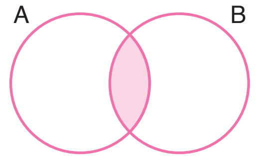
3

Kümelerde İşlemler

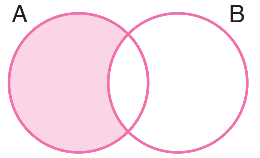
- Birleşim (∪) işlemi
  $A \cup B = (x \mid x \in A \text{ veya } x \in B)$



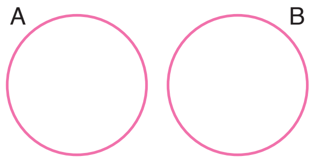
- Keşişim (∩) işlemi
  $A \cap B = (x \mid x \in A \text{ ve } x \in B)$



- Fark (\ , –) işlemi
  $A - B = (x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B)$



- Hiçbir elemanı ortak olmayan kümeye ayrık küme denir.



4

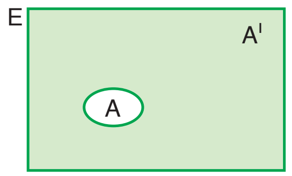
Birleşim - Kesişim - Fark Özellikleri

1) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
5) $A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$
   $A \cup E = E, \quad A \cap E = A$
6) $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
   $s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C)$
   $- s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C)$
   $+ s(A \cap B \cap C)$
7) $A - A = \varnothing \ , \ A - E = \varnothing$
   $\varnothing - A = \varnothing \ , A - \varnothing = A$
8) $s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$
9) $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
   $= (A \cup B) - (A \cap B)$
   (Simetrik Fark)

5

Tümleme İşlemi ve Özellikleri

$A' = A = (x \mid x \in E \text{ ve } x \notin A)$



1) $(A')' = A$
2) $(\varnothing)' = E$
3) $(E)' = \varnothing$
4) $A \cap A' = \varnothing$
5) $A \cup A' = E$
6) $s(A) + s(A') = s(E)$
7) $E - A = A'$
8) $A - B = A \cap B'$
9) De Morgan
   $(A \cup B)' = A' \cap B'$
   $(A \cap B)' = A' \cup B'$
10) $A \subset B \Leftrightarrow A' \supset B'$

6

Küme problemlerinin çözümü yapılırken, verilenlerden uygun bir şekilde venn şeması çizilip, sırasıyla kümelerin en çoğunun kesişmiş olduğu bölgeden en azının kesişmiş olduğu bölgeye doğru verilen eleman sayıları uygun bölgelere yazılarak çözüm yapılır.

7

Sıralı İkili

x ve y gibi herhangi iki eleman arasında belirli bir sıra gözetilerek oluşturulan (x, y) şeklindeki elemana denir.

$x \neq y$ ise $(x, y) \neq (y, x)$

Kartezyen Çarpım:

A ve B boş kümeden farklı iki küme ve birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulan bütün ikililerin kümesine, A kartezyen çarpım B kümesi denir.

$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ ve } y \in B\}$'dir.

$s(A) = m, s(B) = n \Rightarrow s(A \times B) = s(B \times A) = m \cdot n$

8

Kartezyen Çarpımın Özellikleri

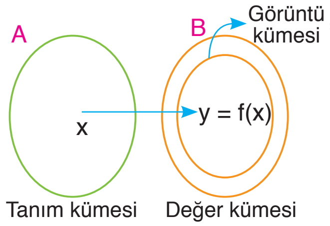
1) $A \neq B \Leftrightarrow A \times B \neq B \times A$
2) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C$
3) $A \times A = A^2 \quad , \quad A \times A \times A = A^3$
4) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
   $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

FONKSİYONLAR

1

Fonksiyon Tanımı

A kümesinin her elemanını B kümesinin yalnız bir elemanına eşleyen bir f bağıntısına fonksiyon denir.



- $s(A) = m$ ve $s(B) = n \Rightarrow$ A'dan B'ye fonksiyon sayısı n^m

2

Fonksiyonlarda İşlemler

$f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ ve $A \cap B \neq \varnothing$

1. $(f \pm g): A \cap B \to \mathbb{R}$ ve $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

2. $(f \cdot g): A \cap B \to \mathbb{R}$ ve $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

3. $\left(\frac{f}{g}\right): A \cap B \to \mathbb{R}$ ve $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

3

Fonksiyon Çeşitleri

1. Doğrusal Fonksiyon: $f(x) = ax + b$

2. Bire-Bir Fonksiyon: Tanım kümesindeki farklı her elemanın görüntüsü de farklı ise bire-bir fonksiyondur.
$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ya da $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

3. Örten fonksiyon: $f(A) = B$ olmak üzere
$f: A \to B$ fonksiyonunun değer kümesinde boşta eleman kalmıyorsa örtendir.

4. İçine fonksiyon: Görüntü kümesinde boşta eleman kalıyorsa içine fonksiyondur. $f(A) \subset B$ ve $f(A) \neq B$

5. Birim fonksiyon ($I(x)$): $f(x) = x$ ise birim fonksiyondur.

6. Sabit fonksiyon: $\forall x \in A$ için $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ sabit fonksiyon ise $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

7. Sıfır fonksiyon: Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 0$

8. Permütasyon fonksiyon: $f: \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \text{Tanım kümesi} \\ \to \text{Görüntü kümesi} \end{matrix}$

9. Parçalı fonksiyon: Tanım kümesinin alt kümelerinde farklı birer kuralla tanımlanan fonksiyona parçalı fonksiyon denir. Alt aralıkların bölündüğü noktalara kritik nokta denir.

10. Tek fonksiyon: $f(-x) = -f(x)$ ve orijine göre simetrik
Çift fonksiyon: $f(-x) = f(x)$ ve Oy eksenine göre simetrik.

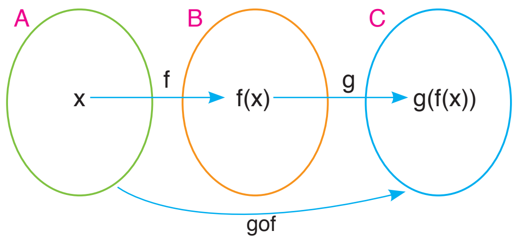
4

Bir Fonksiyonun Tersi

- $f: A \to B$ fonksiyonu bire-bir ve örten ise tersi vardır.
  $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$
  $f^{-1}: B \to A$
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$
- $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{-d}{c}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$
  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ bire-bir ve örten ise $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesi tam kareye çevrilip, x yalnız bırakılmaya çalışılır.

5

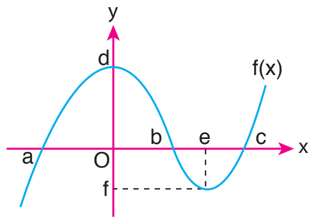
Fonksiyonlarda Bileşke



- $(fog)(x) = f(g(x))$ ve $(gof)(x) = g(f(x))$
- $fog \neq gof$ $(f \neq I \neq g)$
- $fog = gof$ ise
  I. $f = g$ olabilir.
  II. $f = g^{-1}$ olabilir.
  III. f veya g birim fonksiyon olabilir.
- $fogoh = (fog)oh = fo(goh) = f(g(h))$
- $foI = Iof$ ve $fof^{-1} = I$
- $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

6

Fonksiyonların Uygulamaları



- f fonksiyonu:
  $(a, b) \cup (c, \infty)$ aralığında pozitif
  $(-\infty, a) \cup (b, c)$ aralığında negatif
- f fonksiyonu (a, c) aralığında:
  $x = 0$ noktasında maksimum değerini,
  $x = e$ noktasında minimum değerini alır.

f(x) in maksimum değeri d, minimum değeri f'dir.

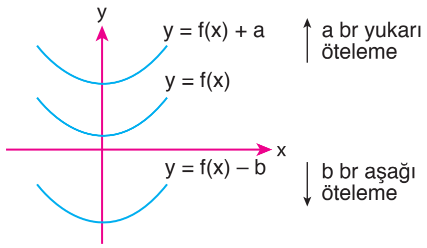
- f fonksiyonu: $(-\infty, 0) \cup (e, \infty)$ aralığında artan,
  $(0, e)$ aralığında azalandır.
- Artan fonksiyon:  veya 
- Azalan fonksiyon:  veya  şeklindedir.
- f fonksiyonunun (a, b) aralığındaki değişim hızı: (teğet eğimi) $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ formülüyle hesaplanır.

7

Fonksiyonların Dönüşümleri

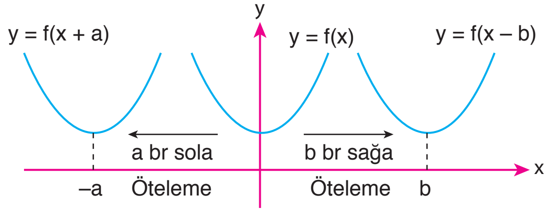
- $y = f(x)$ fonksiyonu; a br yukarı ötelenirse $y = f(x) + a$
  b br aşağı ötelenirse $y = f(x) - b$

fonksiyonu elde edilir.



- $y = f(x)$ fonksiyonu;
  a br sola ötelenirse $y = f(x + a)$
  b br sağa ötelenirse $y = f(x - b)$

fonksiyonları elde edilir.



İSTATİSTİK

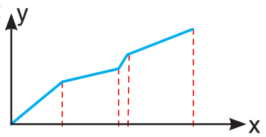
1

Araştırma yapılarak verilerin toplanması, toplanan verilerin analiz edilmesi ile ilgili yöntem ve teknikleri inceleyen bilim dalına istatistik denir.

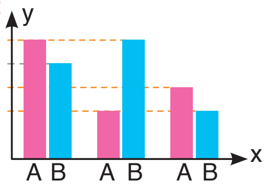
2

Grafikler

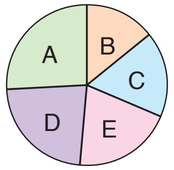
Çizgi Grafiği:



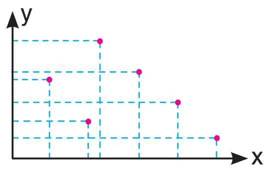
Sütun Grafiği:



Daire Grafiği:



Serpilme Grafiği:



3

Merkezi Eğilim Ölçüleri

1) Aritmetik Ortalama $\overline{X}=\dfrac{\text{Verilerin Toplamı}}{\text{Veri Sayısı}}$

- Aritmetik ortalama ile
  - Grubun ortalama başarı düzeyi
  - Grubun genel başarı düzeyi
  - Grubun ağırlık merkezi yorumlanır.

2) Medyan (ortanca)

Bir sayı dizisi küçükten büyüğe sıralanır. Terim sayısı tek ise ortadaki terim, çift ise ortadaki iki teriminin aritmetik ortalaması medyandır.

3) Mod (Tepe Değer)

- Bir veri grubunda en çok tekrar eden değerdir.
- Bütün değerler eşit miktarda tekrar ediyor veya hiçbir değer tekrarlanmıyorsa bu veri grubunun modu yoktur.
- Aynı sayıda tekrar eden birden fazla değer varsa, mod değeri de birden fazladır.

Merkezi Eğilim Ölçüleri Örnekleri

1) Aritmetik Ortalama {10, 12, 14, 20}

$\overline{X}=\dfrac{10+12+14+20}{4}=14$

2) 2, 5, $\boxed{11}$, 23, 27 → Medyan 11

2, 3, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, 5, 6 → Medyan, $\dfrac{3+4}{2}=3,5$

3) 2, 2, 3, $\boxed{4}$, $\boxed{4}$, $\boxed{4}$, 5, 5 → Mod 4

$\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$, 4, 5, 7 → Mod 2 ve 3

2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5 → Mod yok

2, 3, 4, 5, → Mod yok

4

Merkezi Yayılım Ölçüleri

1) Açıklık

Bir veri grubundaki en büyük ve en küçük değer arasındaki farktır.

Örnek:

2, 5, 8, 10, $\boxed{14}$, 17, 20, 27, 31

a) 31 – 2 = 29 açıklık

b) 2, 4, 8, 10, 14, 17, 20, 28, 31

2 ↓ En küçük değer
14 ↓ Ortanca
31 ↓ En büyük değer

31 – 2 = 29 Açıklık

2) Standart Sapma

Grup içindeki bir verinin ortalamadan ne kadar uzak olduğunu hesaplamak için kullanılır.

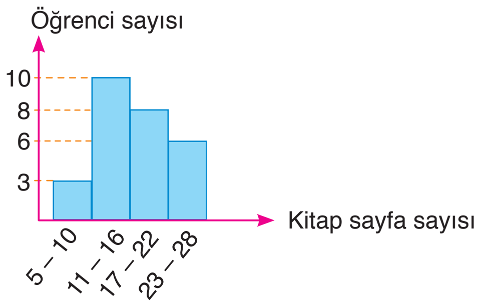
$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots x_n}{n} \qquad S=\sqrt{\frac{(\overline{x}-x_1)^2+(\overline{x}-x_2)^2+\ldots+(\overline{x}-x_n)^2}{n-1}}$$

5

Histogram

Verilerin gruplandırılarak oluşturulduğu grafiklerdir. Sütun grafiğine benzer ancak sütunlar arası boşluk yoktur.

Örnek:



Veri Açıklığı: 23

Grup Açıklığı: 6'dır.

Grup Açıklığı: $\dfrac{\text{Veri Açıklığı}}{\text{Grup Sayısı}}<A$

A'nın en küçük tam sayı değerine grup açıklığı denir.

6

Bir öğrenci grubuna uygulanan test sonucu puanlarının standart sapması hesaplanmış olsun. Buna göre;

Standart Sapma	Küçük	Büyük
Öğrenci grubu	Homojen	Heterojen
Öğrenme düzeyleri	Benzer	Farklı
Puanları birbirlerine	Yakın	Uzak
Öğrenciler arası farklılaşma	Az	Çok
Puanlar aritmetik ortalamaya	Yakın	Uzak
Testin ayırt ediciliği	Düşük	Yüksek
Bilen ve bilmeyen öğrencileri birbirinden	Ayırmamış	Ayırmış

PERMÜTASYON

1

Sayma Metodları

Birbirinden bağımsız r tane işten

1. iş n_1 yoldan

2. iş n_2 yoldan

⋮

r. iş n_r yoldan gerçekleştirilebiliyorsa,

- Bu r tane işten biri (1. si veya 2. si veya .... r. si) $n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_r$ yoldan gerçekleştirilebilir.
- Bu r tane iş birlikte $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots\ldots \cdot n_r$ yoldan gerçekleştirilebilir.

Örnek:

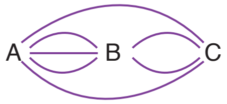
Bir lokantada 3 farklı çorba, 4 farklı et yemeği, 5 farklı tatlı bulunmaktadır.

- 1 çorba veya 1 et yemeği veya 1 tatlı $3 + 4 + 5 = 12$ farklı şekilde yenilebilir.
- 1 çorba,1 et yemeği ve 1 tatlı $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ farklı şekilde yenilebilir.

2

Örnekler

1.



A'dan C'ye $\underset{\text{A-B}}{3} \cdot \overset{\text{B-C}}{2} \underset{\text{veya}}{+} \underset{\text{A-C}}{2} = 8$

farklı yoldan gidilebilir.

2. {0, 1, 2, 3, 4, 5} rakamları kullanılarak üç basamaklı

- $\underset{\text{0 yazılamaz.}}{\underline{5}}\ \underline{6}\ \underline{6} = 180$ sayı yazılır.
- Rakamları farklı $\underset{\text{0 yazılamaz.}}{\underline{5}}\ \underset{\text{Yüzler basamağına yazılan sayı yazılmaz 0 yazılabilir.}}{\underline{5}}\ \underline{4} = 100$ sayı yazılır.
- $\underset{\text{0 yazılamaz.}}{\underline{5}}\ \underline{6}\ \underset{\{1,\ 3,\ 5\}}{\underline{3}} = 90$ tek sayı yazılır.
- $\underset{\text{0 yazılamaz.}}{\underline{5}}\ \underline{6}\ \underset{\{0,\ 2,\ 4\}}{\underline{3}} = 90$ çift sayı yazılır.

3

Permütasyon

- $n \geq r$ ve $n, r \in N^+$ n elemanlı bir kümenin r tane elemanın r'li sıralanışlarının her biri, n'nin r'li permütasyonu olur.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- $P(n, 1) = n, \quad P(n, n) = n!$
- $P(n, r) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots\ldots (n-r+1)}_{\text{r tane}}$

Örnek: $P(7, 3) = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}_{\text{3 tane}}$

4

Örnekler

1. {F, U, R, K, A, N} kümesinin harfleriyle anlamlı veya anlamsız 6 harfli kaç değişik kelime yazılabilir?

$P(6, 6) = 6!$

2. {F, U, R, K, A, N} kümesinin harfleriyle anlamlı veya anlamsız 6 harfli sesli harfler bir arada olacak biçimde kaç değişik kelime yazılabilir?

$\boxed{U\ A}\ F\ R\ K\ N \rightarrow 5! \cdot \underbrace{2!}_{\text{sesli harflerin sıralanışı}}$

5

Tekrarlı Permütasyon

n tane nesnenin, x, y ve z tanesi kendi içinde özdeş ise bu n tane nesne; $\dfrac{n!}{x! \cdot y! \cdot z!}$ farklı şekilde sıralanır.

Örnek: ÇANAKKALE kelimesinin harfleri ile 9 harfli anlamlı veya anlamsız; $\dfrac{9!}{3! \cdot 2!}$ tane kelime yazılabilir.

(3 tane A, 2 tane K)

6

Dairesel Permütasyon

Birbirinden farklı sonlu n elemanın dairesel (dönel sıralanmalarının) sayısı $(n-1)!$ dir.

KOMBİNASYON

1

Kombinasyon

$n, r \in N$ ve $n \geq r$ olmak üzere,

n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı alt kümelerinden her birine A kümesinin r'li kombinasyonu denir.

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Örnek: $C(10, 3) = \dfrac{10!}{7! \cdot 3!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}$

Kombinasyon = Seçme

Örnek1: 7 kişilik bir gruptan 2 kişi kaç farklı şekilde seçilir?

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21$$

Örnek2: 10 kişilik bir sınıftan 3 kişilik ekip kaç farklı şekilde seçilir?

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot \underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{6}}} = 120$$

2

Kombinasyon Özellikleri

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

3. n elemanlı bir kümenin bütün alt kümelerinin sayısı

$$\underset{\substack{\text{boş}\\\text{küme}}}{\binom{n}{0}} + \overset{\substack{\text{1elemanlı alt}\\\text{kümeleri}}}{\binom{n}{1}} + \underset{\substack{\text{2 elemanlı}\\\text{alt kümeleri}}}{\binom{n}{2}} + \ldots + \overset{\substack{\text{kümenin}\\\text{kendisi}}}{\binom{n}{n}} = 2^n$$

4. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

5. $\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Rightarrow (a = b \text{ veya } a + b = n)$

6. $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$

3

Kombinasyonda Geometri

Herhangi üçü doğrusal olmayan n nokta ile en çok

- $\binom{n}{2}$ adet doğru
- $\binom{n}{3}$ adet üçgen
- $\binom{n}{4}$ adet dörtgen çizilir.

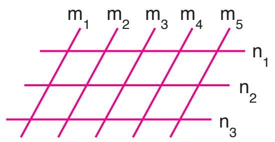
Herhangi üçü paralel olmayan n doğru en çok

- $\binom{n}{2}$ adet noktada kesişir.
- $\binom{n}{3}$ adet üçgen oluşturur.
- $\binom{n}{4}$ adet dörtgen oluşturur.

Yarıçapları farklı n tane çember en çok

- $\binom{n}{2} \cdot 2$ noktada kesişir.

Örnek1:

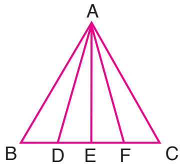


şeklinde

$\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$

adet paralelkenar var.

Örnek2:



A tepe noktası olacak B, C, D, E, F noktalarında 2 nokta seçilir.

$\binom{5}{2} = 10$ farklı üçgen çizilir.

BİNOM

1

Binom

- $n \in N$, x ve y den en az biri sıfırdan farklı

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + ... + \binom{n}{n}y^n$$

eşitliğine binom açılımı denir.

Örnek:

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

2

Binom Özellikleri

$(x + y)^n$ açılımında

1. $n + 1$ tane terim var.
2. Her terimde x ve y'nin üsler toplamı n
3. Katsayılar toplamı için değişkenler yerine 1 yazılır.
4. Baştan $(r + 1)$ terim $\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$
5. $(x + y)^{2n}$ açılımında ortanca terim $\binom{2n}{n}x^ny^n$ dir.
6. Baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin katsayıları mutlak değerce eşittir.

3

Binomda sabit sayı sorulursa değişkenler yerine 0 yazılır. Eğer paydayı sıfır yapıyorsa aşağıdaki örnekte olduğu gibi değişkenler yok edilir.

Örnek: $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^9$

$$\binom{9}{r}x^{9-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$9 - r = 2r$ olmalı

$9 = 3r$

$r = 3$

$$\binom{9}{r}x^6 \cdot \frac{1}{x^6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ sabit terimdir.}$$

OLASILIK

1

- Bir deneyde elde edilebilecek bütün çıktıların kümesine **örnek uzay** denir.
- Bir örnek uzayın herhangi bir alt kümesine **olay**, boş kümeye **imkânsız olay**, E örnek uzayına **kesin olay** denir.
- Bir örnek uzaya ait iki olayın kesişimi boş küme ise bu iki olaya **ayrık olay** denir.
- E örnek uzayına ait bir A olayının olasılığı P(A) ile gösterilmek üzere $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ sonlu bir örnek uzay olsun.

  $P(e_1) = P(e_2) = ... = P(e_n)$ ise eş olumlu örnek uzaydır.

2

Olasılık Hesabı

- $n, r, e\ Z^+$ $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ eş olumlu bir örnek uzay olmak üzere, E'ye ait bir A olayı

$A = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ ise A olayının olasılığı,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{r}{n} = \frac{\text{İstenen bütün durumların sayısı}}{\text{Olabilecek bütün durumların sayısı}}$$

şeklinde hesaplanır.

3

Özellikler

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(E) = 1$
2. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
3. A olayının gerçekleşme olasılığı P(A), gerçekleşmeme olasılığı ise $P(A^{I})$ olmak üzere,

   $P(E) = P(A) + P(A^{I}) = 1$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ikişer ikişer ayrık olaylar

   $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = E$

   $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$

4

Koşullu (Şartlı) Olasılık

- A ve B, E örnek uzayının herhangi iki olayı olmak üzere B olayının gerçekleşmiş olması hâlinde A olayının gerçekleşmesi olasılığına, A olayının B'ye bağlı koşullu (şartlı) olasılığı denir.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Örnek:

Hilesiz bir zarın düzgün bir zemine atıldığında asal sayı geldiği biliniyor. Buna göre çift sayı gelme olasılığı nedir?

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$

$$\Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

5

Bağımsız Olaylar

- İki olaydan birinin gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesi, diğerinin gerçekleşme olasılığını değiştirmiyorsa bu iki olaya bağımsız olaylar denir.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

Örnek:

Madeni paranın yazı gelmesinin olasılığı $P(A) = \frac{1}{2}$

Hilesiz bir zarın üst yüzüne asal sayı gelmesinin olasılığı $P(B) = \frac{3}{6}$

İki olayın birlikte olma olasılığı $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

1

- $ax^2 + bx + c = 0$ eşitliği ($a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$)

2. dereceden bir bilinmeyenli denklemlerdir.

3

Köklü ve mutlak değerli denklemlerde bulunan kökler denklemde bilinmeyen yerine yazılır, denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir.

Örnek: $4 - x = \sqrt{2x+7}$ denkleminin çözümü kümesini bulalım.

$(4 - x)^2 = (\sqrt{2x+7})^2 \Rightarrow 16 - 8x + x^2 = 2x + 7$

$x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 9) = 0$

$x_1 = 1$, $x_2 = 9$ ancak $x_2 = 9$ için $4 - 9 = \sqrt{2 \cdot 9 + 7}$

$-5 \neq 5$ olduğundan çözüm kümesine dahil edilemez.

Ç.K = {1}

4

- $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.
- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
- $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
- $\underset{(x_2)}{\frac{1}{x_1}} + \underset{(x_1)}{\frac{1}{x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c}$
- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3 \cdot \frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}$$

Kökler toplamı ve kökler çarpımı yardımıyla formüller üretilebilir.

2

Kök Bulma

$ax^2 + bx + c = 0$

- Çarpanlarına ayırarak

$(dx + e)(fx + g) = 0$

- Diskriminant (Δ) yardımıyla

$\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$ ise iki farklı reel kök var.

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

- $\Delta = 0$ ise aynı (çakışık, çift katlı) iki kökü var.

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

- $\Delta < 0$ ise reel kök yoktur.

Örnek:

- $x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 1) = 0$

$x_1 = 6$, $x_2 = -1$

- $x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7$

$\Delta < 0$ olduğundan reel kök yok.

5

- Kökleri x_1, x_2 olan denklem $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{Kökler toplamı}}x + \underbrace{x_1 x_2}_{\text{Kökler çarpımı}} = 0$ yani $x^2 - T \cdot x + Ç = 0$ şeklinde yazılır.

Örnek: $4x^2 - 6x - 1$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Bu köklerin 2 katının 1 fazlasını kök kabul eden ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazalım.

$x_1 + x_2 = -\frac{-6}{4} = \frac{3}{2}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{4}$ oluşturulacak denklemin

1. kökü $= 2x_1 + 1$

2. kökü $= 2x_2 + 1$

Kökler toplamı: $2x_1 + 1 + 2x_2 + 1 = 2(x_1 + x_2) + 2$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 = 5$$

Kökler çarpım: $(2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = 4x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1$

$$= 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 \cdot \frac{3}{2} + 1$$

$$= -1 + 3 + 1 = 3$$

O hâlde $x^2 - 5x + 3 = 0$

KARMAŞIK SAYILAR

1

Karmaşık Sayı

$\sqrt{-1} = i$, a ve b reel sayı olmak üzere $z = a + bi$ biçimindeki sayılara karmaşık sayı denir.

a; reel kısım Re(z) = a

b; imajiner (sanal) kısım, İm(z) = b

2

i'nin Kuvvetleri

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$

- 4'ten büyük kuvvetler için üs daima 4'e bölünür. Kalan üs olarak yazılır.
- Negatif kuvvetleri pozitif yapacak şekilde üsse 4'ün katları eklenir.

4

İki Karmaşık Sayının Eşitliği

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olmak üzere

$z_1 = z_2 \Rightarrow a = c$ ve $b = d$

6

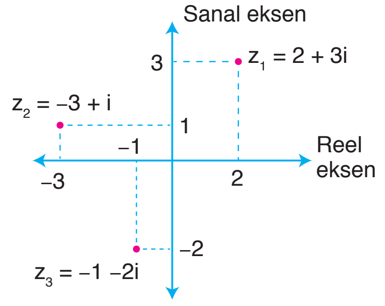
Karmaşık Sayılarda İşlemler

$z_1 = a + bi$ $z_2 = c + di$ olmak üzere

- $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$
- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $\underset{(\overline{z_2})}{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$

3

Karmaşık Düzlem



5

Karmaşık Sayının Eşleniği

$z = a + bi$ ise $\overline{z} = a - bi$

- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$
- $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$
- $\overline{(\overline{z})} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right)$
- 2. dereceden denklemin bir kökü $z = a + bi$ ise diğeri $\overline{z} = a - bi$'dir.

7

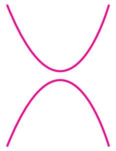
- $(1 + i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1 - i)^2 = 1^2 - 2i + i^2 = -2i$

SADIK UYGUN YAYINLARI

PARABOL

1

a, b, c ∈ IR ve a ≠ 0 olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun analitik düzlemdeki görüntüsüne parabol denir.



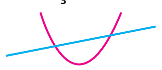
Parabol, yandaki gibi kolları yukarıya doğru veya aşağıya doğru olan bir eğridir.

6

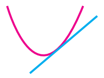
Parabol ile Doğru İlişkisi

f(x) parabolü ile g(x) doğrusu için $f(x) - g(x) = 0$ oluşan 2. dereceden denklemin diskriminantı (Δ) bulunur.

- Δ > 0 ise iki farklı noktada kesişir.



- Δ = 0 ise teğet olur.



- Δ < 0 ise kesişmezler.

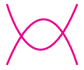
Parabol ile Parabol İlişkisi

f(x) parabolü ile g(x) parabolü için

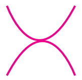
$f(x) - g(x) = 0$ oluşan

2. dereceden denklemin diskriminantı (Δ) bulunur.

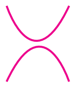
- Δ > 0 ise iki farklı noktada kesişirler.



- Δ = 0 ise teğettirler.



- Δ < 0 ise kesişmezler.



7

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun daima pozitif değerler alması için a > 0 ve Δ < 0 olması gerekir.
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun daima negatif değerler alması için a < 0 ve Δ < 0 olması gerekir.

5

Kökleri x_1, x_2 ve herhangi bir $A(x_0, y_0)$ noktası bilinen parabol denklemi;

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Örnek: x eksenini –3 ve 5 noktasında kesen ayrıca (0, 4) noktasından geçen parabol;

$4 = a(0 - (-3))(0 - 5)$

$a = -\frac{4}{15}$

$y = -\frac{4}{15}(x + 3)(x - 5) \rightarrow y = -\frac{4}{15}(x^2 - 2x - 15)$

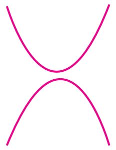
2

Parabolü Tanıyalım

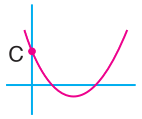
$f(x) = ax^2 + bx + c$

1. a > 0 ise kollar yukarı

   a < 0 ise kollar aşağı

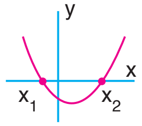


2. x = 0 ise y = C noktası parabolün y eksenini kestiği noktadır.

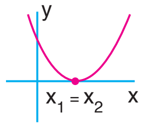


3. y = 0 ise $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denklem elde edilir.

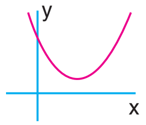
- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise x eksenini iki noktada keser. (x_1 ve x_2 farklı iki kök)



- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise x eksenine $x_1 = x_2$ de teğet (aynı iki kök)

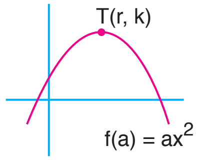


- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise x eksenini kesmez. (reel kök yok.)



3

Parabolün Tepe Noktası



$f(a) = ax^2 + bx + c$ $r = -\frac{b}{2a}$ $k = f(r)$ veya $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$

- Parabol en küçük veya en büyük değerini tepe noktasında alır.
- x = r doğrusuna parabolün simetri ekseni denir.

4

Tepe noktası T(r, k) ve herhangi bir $A(x_0, y_0)$ noktası bilinen parabol denklemi;

$y = a(x - r)^2 + k$

Örnek: Tepe noktası T(2, 6) ve A(0,4) noktasından geçen parabol;

$y = a(x - r)^2 + k$

$4 = a(0 - 2)^2 + 6$

$a = -\frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 6$

POLİNOM

1

- $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$ ifadesinin polinom olabilmesi için;
- $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ (x'in katsayıları reel sayı olmalı)
- $0, 1, 2, ..., n-1, n \in \mathbb{N}$
- a_n reel sayısı polinomun başkatsayısı
- a_0 reel sayısı polinomun sabit terimi
- Kuvveti en büyük olan x'in derecesine polinomun derecesi denir. der[P(x)]

Örnek:

$x^3 + \sqrt{3}x - \frac{1}{2}$ polinomdur.

$x^{-3} + 2x + 1$ polinom değil $-3 \notin \mathbb{N}$

$\sqrt{-2}x^2 - 2x + 1$ polinom değil $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$

2

Özel Polinomlar

- Çok değişkenli polinom: P(x, y)
- Sabit polinom: $P(x) = c \in \mathbb{R}$
  $c \neq 0$
- Sıfır polinom: P(x) = 0

3

Polinomlarda Değer Bulma

- P(x) veriliyor, P(a) soruluyorsa verilen polinomda x yerine a yazılır.

Örnek:

$P(x) = x^2 + 3x + 1$

$P(2) \to x = 2$ için $P(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 11$

$P(x+1) \to x = x + 1$ için $P(x+1) = (x+1)^2 + 3 \cdot (x+1) + 1$

$= x^2 + 5x + 5$

4

Sabit Terimi Bulma

- Polinomda değişkenler yerine "0" yazılır.

Katsayılar Toplamını Bulma

- Polinomda değişkenler yerine "1" yazılır.
- P(x) polinomunun
- Çift dereceli katsayılar toplamı
  $\frac{P(1)+P(-1)}{2}$
- Tek dereceli katsayılar toplamı
  $\frac{P(1)-P(-1)}{2}$

Örnek:

$P(x) = 3x^3 - x + 2$ polinomunun sabit terimi

$P(0) = 2$

Katsayılar toplamı $P(1) = 4$

5

Polinomların Eşitliği

- P(x) ve Q(x)'in eşit dereceli terimlerinin katsayıları aynı ise bu iki polinom eşittir.

Polinomlarda Toplama - Çıkarma

- Dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları toplanır (çıkarılır).

Polinomlarda Çarpma

- Polinomların her teriminin birbiri ile çarpılması ile bulunur.

Örnek:

$(x+1)(x^2+2x-3)$

$= x^3 + 2x^2 - 3x + x^2 + 2x - 3$

$= x^3 + 3x^2 - x - 3$

6

Polinomlarda Bölme

$$\text{Bölünen} \leftarrow \begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \to \text{Bölen} \\ \cline{2-2} & B(x) \to \text{Bölüm} \\ \underline{-\qquad} & \\ K(x) & \end{array} \searrow \text{Kalan}$$

der P(x) ≥ der Q(x)

der K(x) < der Q(x)

$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$

K(x) = 0 ise P(x), Q(x)'e kalansız bölünür.

Örnek:

Bölünen

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + 1 & x + 1 \to \text{Bölen} \\ \cline{2-2} \underline{-\; x^3 + x^2} & x^2 + x - 1 \to \text{Bölüm} \\ x^2 + 1 & \\ \underline{-\; x^2 + x} & \\ -x + 1 & \\ \underline{-\; -x - 1} & \\ 2 \to \text{Kalan} & \end{array}$$

7

k, m, n pozitif tam sayılar (m > n)

- der[P(x)] = m, der[Q(x)] = n
- der[P(x) ± Q(x)] = m
- $der[P(x) \cdot Q(x)] = m + n$
- $der\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = m - n$
- der[kP(x)] = m
- $der[kP(x^k)] = der[P^k(x)] = m \cdot k$
- $der[P(Q(x))] = m \cdot n$

8

Kalan Bulma

$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$

- Q(x) = ax + b ise ax + b = 0
  $x = -\frac{b}{a}$; $P\left(-\frac{b}{a}\right) = K(x)$
  (P(x) polinomunda x yerine bölen polinomunun kökü yazılırsa kalan bulunur.)
- $ax^2 + bx + c$ ile bölümünden kalan için
  $ax^2 + bx + c = 0$
  $x^2 = \frac{-bx - c}{a}$
  ifadesi P(x) polinomundaki x^2 lerin yerine yazılır.

9

- $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + mx + n$ eşitliğinde x_1 ve x_2; Q(x)'in kökleri ise
  $P(x_1) = mx_1 + n$
  $P(x_2) = mx_2 + n$
  denklem sisteminin çözümünden m ve n bulunur.
  K(x) = mx + n

Örnek:

$P(x) = x^2 - 4x + 2$ polinomunun $x^2 - 4$ ile bölümünden kalan

$P(x) = (x^2 - 4)\,B(x) + mx + n$

$x_1 = 2,\ x_2 = -2$

$P(2) = 2m + n = -2$

$P(-2) = -2m + n = 14 \quad \Rightarrow \quad n = 6 \quad m = -4 \Rightarrow K(x) = -4x + 6$

10

- P(x) polinomu
  $(ax + b)^n$ ile tam bölünüyorsa
  $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = \underbrace{P^{I}\left(-\frac{b}{a}\right)}_{\text{1. türev}} = \underbrace{P^{II}\left(-\frac{b}{a}\right)}_{\text{2. türev}} = ... = \underbrace{P^{(n-1)}\left(-\frac{b}{a}\right)}_{(n-1)\text{. türev}} = 0$$